VECTORES EN 2D Y 3D

Conceptos básicos:

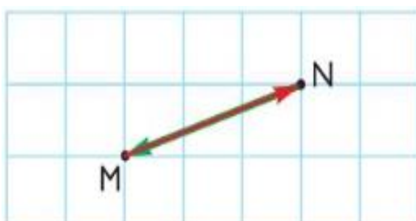
Un **vector** es un segmento orientado que representa un desplazamiento que puede ser en el plano o en el espacio. Todo vector, consta de tres elementos: dirección, sentido y magnitud (módulo o norma). Por lo general los vectores se representan con letras minúsculas: $\vec{v}, \vec{w}$ o indicando el punto de partida y el de llegada

Módulo: Corresponde al valor numérico de la magnitud vectorial. Longitud de la flecha. Distancia entre los extremos del vector. Sea el vector $\vec{v}$ el módulo del vector se denota por $\|\vec{v}\|$.

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{donde} \quad \vec{v} = \langle a, b \rangle = (a, b)$$

Dirección: Corresponde a la orientación en el plano o en el espacio de la recta que lo contiene.

Sentido: Indica cual es el origen y cuál es el extremo final de la recta



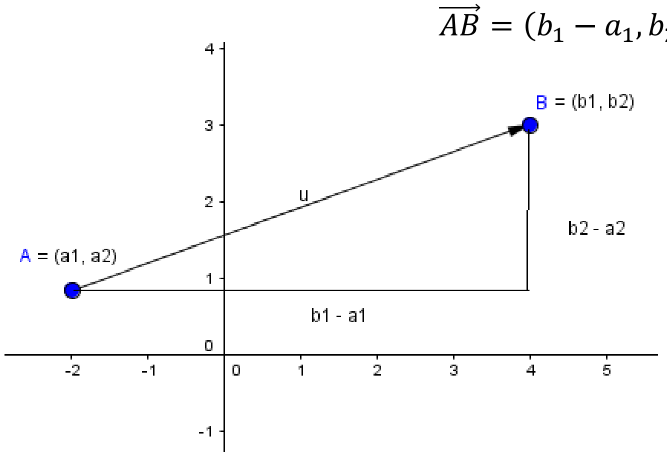
Los vectores $\overrightarrow{MN}$ y $\overrightarrow{NM}$ tienen distinto sentido, pero igual magnitud (miden lo mismo) y dirección (tienen la misma inclinación).

La punta de la flecha del vector, indica el sentido de este.

COORDENADAS DE UN VECTOR EN 2D:

Dado un sistema de coordenadas, si $A = (a_1, a_2)$ y $B = (b_1, b_2)$, entonces las componentes del vector $\overrightarrow{AB}$ son:

$$\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$$



Observa que si O es el origen de coordenadas, las coordenadas de un punto P y las componentes del vector $\overrightarrow{OP}$ coinciden.

Ejercicio 1: Determine las componentes de los siguientes vectores en cada caso, a partir de los puntos dados

A(25,4); B(7,22); C(21,29) y D(2,6)

a) $\overrightarrow{AB}$

b) $\overrightarrow{BC}$

c) $\overrightarrow{AD}$

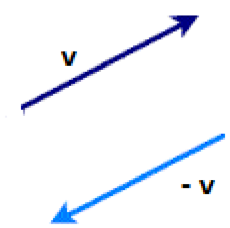
d) $\overrightarrow{DC}$

ALGUNAS DEFINICIONES:

El **vector Nulo:** El vector nulo corresponde a $\vec{0} = 0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, y corresponde a un desplazamiento nulo en cada sentido.

El **vector opuesto**: Sea $\vec{v}$ un vector cualquiera. Entonces el vector opuesto $(-\vec{v})$ corresponde al mismo vector $\vec{v}$, pero con distinto sentido.

En el dibujo, tenemos a $\vec{v}$ y a $(-\vec{v})$



Por lo tanto: $\vec{v} + \ (-\vec{v}) = 0$

OPERACIONES CON VECTORES:

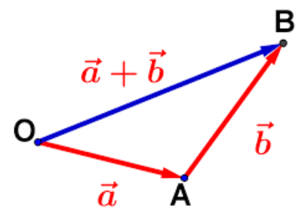
Para sumar vectores o multiplicar un vector por un escalar (número real), se efectúa la operación correspondiente con las respectivas componentes de los vectores.

Así, si $\vec{v} = (v_1, v_2)$ y $\vec{w} = (w_1, w_2)$, se tiene:

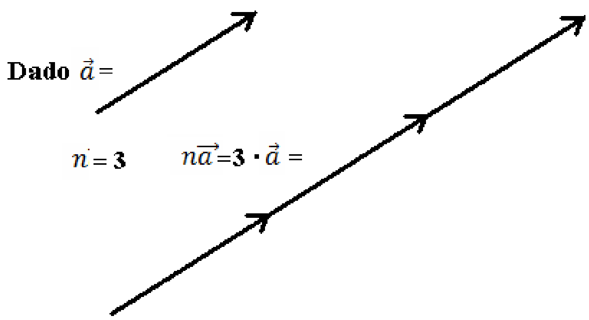
$$\vec{v} + \vec{w} = (v_1 + w_1, v_2 + w_2) \quad ; \quad a\vec{v} = (av_1, av_2)$$

Ejemplo: Determina las siguientes operaciones de $3\vec{v} + 5\vec{w}$, si $\vec{v} = (2, -1)$ y $\vec{w} = (4,3)$

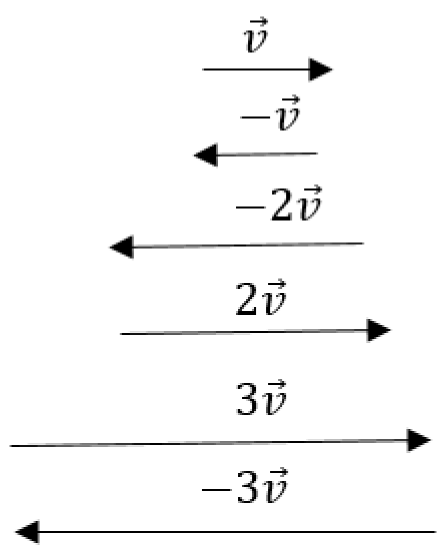
Para obtener geométricamente $\vec{a}+\vec{b}$, debemos poner el inicio del vector $\vec{b}$ coincidiendo con el fin del vector $\vec{a}$. Así al unir la trayectoria con un solo vector, obtenemos $\vec{a}+\vec{b}$,



Geométricamente la multiplicación de un vector por un escalar, se puede representar por la siguiente figura.



Entonces:



EJERCICIO 2: Dados los vectores $\vec{u} = (1,3)$ y $\vec{v} = (-2,0)$. Calcula:

a) $\vec{u} + \vec{v}$ b) $-3\vec{u}$ c) $2\vec{u} - 3\vec{v}$

EJERCICIO 3: Dados los vectores $\vec{a} = (3,-2)$, $\vec{b} = (-1,5)$ y $\vec{c} = (4,6)$, determina:

a) $\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$ b) $\vec{a} + 3\vec{b} - 2\vec{c}$

Observaciones:

- ✓ Dos vectores son iguales si y sólo si sus componentes correspondientes son iguales.
- ✓ Dos vectores son linealmente dependientes si existe un escalar que la multiplicar uno de los vectores da como resultado el otro.

EJERCICIO 4: Determina el valor de x e y si los vectores $\vec{m} = (x+y, x-y)$ y $\vec{n} = (7,5)$ son iguales.

EJERCICIO 5: Sean $\vec{m} = (3,2)$ y $\vec{n} = (1,4)$. Determina el valor de los escalares a y b si:

$$a \cdot \vec{m} + b \cdot \vec{n} = (5,0)$$

EJERCICIO 6: Dado el vector $\vec{v} = (2,3)$ y el escalar $k = 2$. Determine el módulo del vector $k\vec{v}$.

Observación: Recuerda que el ejercicio 6 se puede calcular el módulo del vector y ese resultado multiplicarlo por el escalar, puesto que es 2 veces la magnitud del vector (2,3).

PRODUCTO ESCALAR o PRODUCTO PUNTO:

Sea $\vec{u} = (u_1, u_2)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2)$, entonces $\boldsymbol{\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2}$

Ejemplo: Sea $\vec{u} = (3,0)$ y $\vec{v} = (5,5)$, entonces $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \cdot 5 + 0 \cdot 5 = 15$

Observación: Cuando el producto punto es 0, entonces los vectores son perpendiculares.

PROPIEDADES: Sea $\vec{u} = (u_1, u_2)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2)$

1) El producto punto entre $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es conmutativo, es decir $\vec{u} \cdot \vec{v}$ = $\vec{v} \cdot \vec{u}$

2) El producto punto se distribuye sobre la suma. Es decir: $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$.

3) Si k es un escalar cualquiera, se tiene que $(k\vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{v} \cdot (k\vec{w}) = k(\vec{v} \cdot \vec{w})$.

VECTOR UNITARIO

Sea $\vec{v}$ un vector. Diremos que $\vec{v}$ es un vector unitario si y solo si $\boldsymbol{\|\vec{v}\| = 1}$ (Módulo 1).

Ejemplo: Un vector unitario es $\vec{v} = (0{,}6; 0{,}8)$, dado que:

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{0{,}6^2 + 0{,}8^2} = \sqrt{0{,}36 + 0{,}64} = \sqrt{1} = 1$$

Ejercicio: Determina los posibles valores de x si el vector $(0{,}5; x)$ es unitario.

- Hay ciertos **vectores unitarios especiales** que son:

$$\boldsymbol{\hat{\imath} = (1, 0)} \quad \textbf{y} \quad \boldsymbol{\hat{\jmath} = (0, 1)}$$

Estos vectores forman una base, que permite escribir cualquier vector en función de ellos.

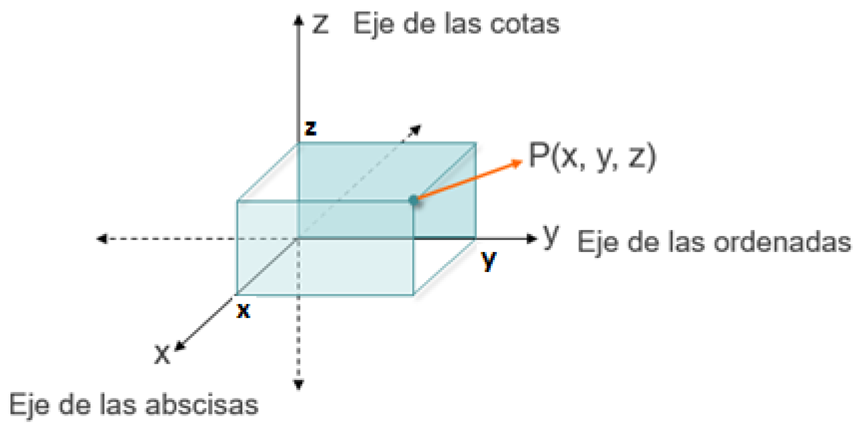
Ejemplo: El vector $\vec{v} = (2, -5)$, lo podemos escribir como $\vec{v} = 2\hat{\imath} - 5\hat{\jmath}$

Puesto que $\vec{\mathrm{v}} = 2(1{,}0) - 5(0{,}1) = (2{,}0) + (0, -5) = (2, -5)$

VECTORES EN 3D

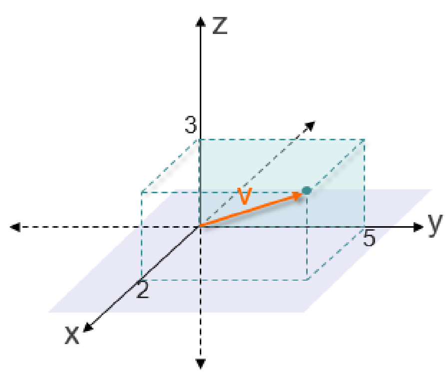
Definición:

Un **sistema de coordenadas tridimensional** se construye trazando un eje z, perpendicular en el origen de coordenadas a los ejes x e y.



Un **vector en el espacio** es cualquier segmento orientado que tiene su origen en un punto y su extremo en el otro.

Ejemplo:



MÓDULO: Corresponde al valor numérico de la magnitud vectorial. Longitud de la flecha. Distancia entre los extremos del vector. Sea el vector $\vec{v}$ el módulo del vector se denota por $||\vec{v}||$. (Solamente el vector nulo tiene módulo cero).

$$||\vec{x}|| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad \text{donde} \quad \vec{v} = \langle x, y, z \rangle = (x, y, z)$$

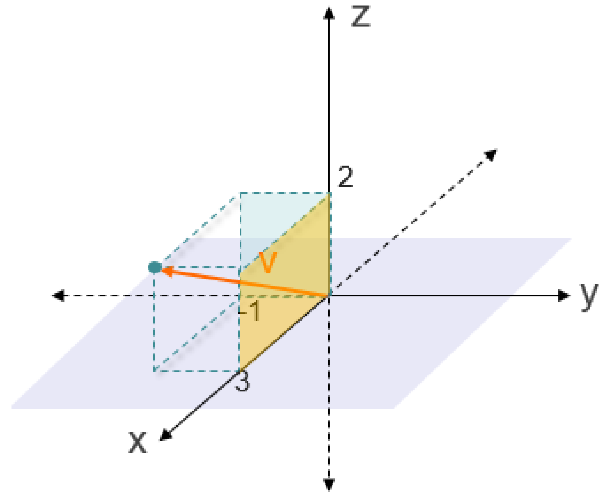
Ejemplo:

El módulo del vector $\vec{v}(3,-1,2)$

$$\overrightarrow{|v|} = \sqrt{3^2 + (-1)^2 + 2^2}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{9+1+4}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{14} \sim 3{,}7$$

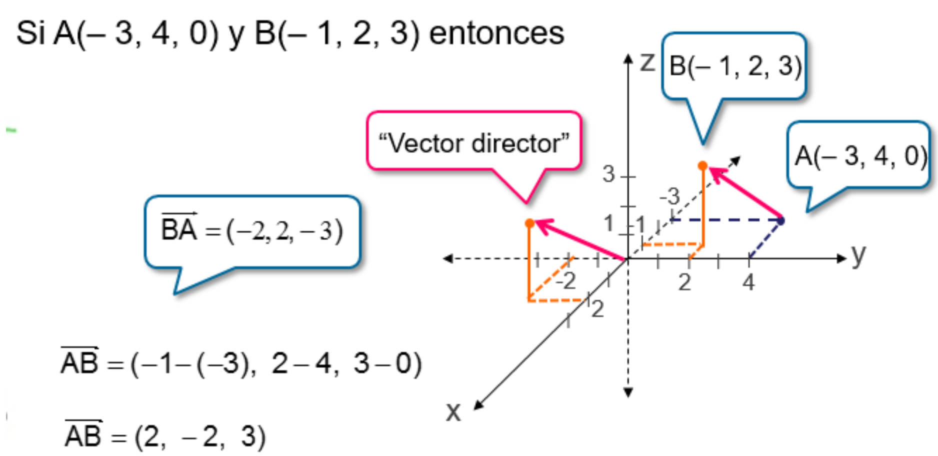


Ejemplo: Determine el módulo del vector $\vec{m} = (-1,-2,2)$

COORDENADAS DE UN VECTOR $\overrightarrow{AB}$ EN EL ESPACIO

Si $A(x_1, y_1, z_1)$ y $B(x_2, y_2, z_2)$ entonces $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$

Ejemplo:



Ejercicios:

Dados los puntos: $A = (1, -2, 4)$, $B = (-2, 4, 6)$, $C = (-5, 2, 1)$ y $D = (-7, -4, 8)$

Determine los siguientes ***vectores directores:***

1) $\overrightarrow{AB}$	2) $\overrightarrow{BC}$
3) $\overrightarrow{CA}$	4) $\overrightarrow{DB}$

OPERACIONES CON VECTORES:

Para sumar vectores o multiplicar un vector por un escalar (número real), se efectúa la operación correspondiente con las respectivas componentes de los vectores.

Así, si $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ y $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$, se tiene:

$$\vec{v} + \vec{w} = (v_1 + w_1, v_2 + w_2, v_3 + w_3) \quad ; \quad a\vec{v} = (av_1, av_2, av_3)$$

Ejemplo: Sean $\vec{v} = (1,2,4)$ y $\vec{w} = (2,5,-3)$. Calcule:

1) $\vec{v} + \vec{w}$	2) $\vec{v} - \vec{w}$
3) $2\vec{v} - 3\vec{w}$	4) $-5\vec{v} + \vec{w}$

PRODUCTO ESCALAR o PRODUCTO PUNTO:

Sea $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, entonces:

$$\boldsymbol{\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_3}$$

Ejemplo: Sea $\vec{u} = (3,0,2)$ y $\vec{v} = (5,5,1)$, determina $\vec{u} \cdot \vec{v}$

Observación: Cuando el producto punto es 0, entonces los vectores son perpendiculares.

PROPIEDADES: Sea $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ (Se heredan las propiedades de 2D)

1) El producto punto entre $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es conmutativo, es decir $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
2) El producto punto se distribuye sobre la suma. Es decir: $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$.
3) Si k es un escalar cualquiera, se tiene que $(k\vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{v} \cdot (k\vec{w}) = k(\vec{v} \cdot \vec{w})$.

Observación:

- Hay ciertos vectores unitarios especiales que son:

$$\boldsymbol{\hat{\imath} = (1,0,0) \;\; ; \;\; \hat{\jmath} = (0,1,0)} \text{ **y** } \boldsymbol{\vec{k} = (0,0,1)}$$

Estos vectores forman una base, que permite escribir cualquier vector en función de ellos.

Ejemplo: El vector $\vec{v} = (2, -5, 7)$, lo podemos escribir como $\vec{v} = 2\hat{\imath} - 5\hat{\jmath} + 7\hat{k}$

Puesto que:

$\vec{\mathrm{v}} = 2(1,0,0) - 5(0,1,0) + 7(0,0,1) = (2,0,0) + (0,-5,0) + (0,0,7) = (2,-5,7)$

ECUACIONES VECTORIALES EN 2D

ECUACIÓN VECTORIAL:

Si la recta L tiene vector $\vec{d}$, y además pasa por los puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ está dada por:

$$\boxed{(x, y) = (x_1, y_1) + t(d_1, d_2)}$$

Con t un valor real cualquiera, que llamaremos parámetro.

Donde $P(x, y)$ es un punto de la recta y $\vec{d} = (d_1, d_2)$ es el vector director.

$$\vec{d} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

Además $m = \frac{d_2}{d_1}$, recuerda que m es la pendiente.

EJEMPLO:

Calcula la ecuación vectorial de la recta que pasa por $P(2, -1)$ y $Q = (3,1)$

Primero debemos calcular las coordenadas del vector director, es decir:

$$\vec{d} = (3,1) - (2, -1) = (2 - 3, 1 - -1) = (1,2)$$

Luego, determinamos la ecuación vectorial:

$$(x, y) = (2, -1) + t(1,2)$$

Observación: Como $t \in R$

$$(x, y) = (3,1) + t(1,2)$$

También es una ecuación vectorial que pasa por P y Q.

ECUACIÓN PARAMÉTRICA DE LA RECTA

Si $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$, entonces, la ecuación paramétrica está dada por:

$$\boxed{\begin{aligned} x &= x_1 + t(x_2 - x_1) \\ y &= y_1 + t(y_2 - y_1) \end{aligned}}$$

EJEMPLO:

Determine la ecuación paramétrica de la recta que pasa por $P(2, -1)$ y $Q = (3,1)$

ECUACIÓN CONTINUA O SIMÉTRICA:

Sean $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ y el vector director:

$\vec{v} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ y $d_1 = x_2 - x_1$ y $d_2 = y_2 - y_1$

$$t = \frac{x - x_1}{d_1} \quad \text{y} \quad t = \frac{y - y_1}{d_2}$$

Luego, igualamos los parámetros y así obtenemos la ecuación continua:

$$\frac{x - x_1}{d_1} = \frac{y - y_1}{d_2}$$

EJEMPLO:

1) Determine la ecuación continua de la recta que pasa por $P(2, -1)$ y $Q = (3,1)$

2) Dada la ecuación vectorial de la recta, determine la ecuación cartesiana:

Sea la ecuación vectorial

$$(x, y) = (5,2) + t(3,1)$$
$$(x, y) = (5,2) + (3t, t)$$
$$(x, y) = (5 + 3t, 2 + t)$$

Se igualan los componentes: $x = 5 + 3t \qquad y = 2 + t$

En ambas ecuaciones de despeja t. Entonces, se tiene que:

$$\mathrm{t} = \frac{\mathrm{x} - 5}{3} \qquad \text{y} \qquad \mathrm{t} = \mathrm{y} - 2 \quad \text{luego igualamos} \quad \frac{x - 5}{3} = y - 2$$

Se igualan ambas ecuaciones:

$$x - 5 = 3(y - 2)$$
$$x - 5 = 3y - 6$$
$$x - 3y + 1 = 0 \quad \text{(Ecuación cartesiana)}$$

EJERCICIOS: Para cada ecuación vectorial de la recta, determina la ecuación cartesiana correspondiente.

1) $(x, y) = (1,2) + t(4,8)$
2) $(x, y) = (5,1) + t(0,3)$
3) $(x, y) = (3, -2) + t(1, -6)$
4) $(x, y) = (3,5) + t(4,0)$

ECUACIÓN VECTORIAL EN EL ESPACIO

Al igual que en el plano, es posible determinar la ecuación vectorial, paramétrica y cartesiana de una recta en el espacio. El procedimiento es exactamente el mismo:

ECUACIÓN VECTORIAL:

Si $A(x_1, y_1, z_1)$ y $B(x_2, y_2, z_2)$, la ecuación vectorial de la recta, que pasa por los puntos A y B es:

$$(x, y, z) = A + t(B - A) \text{ ó } (x, y, z) = B + t(A - B)$$

Con t en los números reales.

EJEMPLO: Si $A(-1,1,3)$ y $B(1,2,0)$, la ecuación vectorial de la recta que pasa por A y B es:

$(x, y, z) = A + t(B - A)$
$(x, y, z) = (-1,1,3) + t((1,2,0) - (-1,1,3))$
$(x, y, z) = (-1,1,3) + t(2,1,-3)$

ECUACIONES PARAMÉTRICAS:

Si $A(x_1, y_1, z_1)$ y $B(x_2, y_2, z_2)$, entonces, la ecuación paramétrica está dada por:

$$x = x_1 + t(x_2 - x_1)$$

$$y = y_1 + t(y_2 - y_1)$$

$$z = z_1 + t(z_2 - z_1)$$

Donde t es un valor real.

EJEMPLO: Si $A(-1,1,3)$ y $B(1,2,0)$ entonces la ecuación vectorial de la recta que pasa por A y B es:

Luego, las ecuaciones paramétricas son:

$$x = -1 + t(1 - (-1)) \qquad x = -1 + 2t$$
$$y = 1 + t(2 - 1) \qquad y = 1 + t$$
$$z = 3 + t(0 - 3) \qquad z = 3 - 3t$$

ECUACIÓN CONTINUA O SIMÉTRICA:

Sean $A(x_1, y_1, z_1)$ y $B(x_2, y_2, z_2)$

Y el vector director

$\vec{v} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ y $d_1 = x_2 - x_1$, $d_2 = y_2 - y_1$ y $d_3 = z_2 - z_1$

$$t = \frac{x - x_1}{d_1} \quad , \quad t = \frac{y - y_1}{d_2} \quad \text{y} \quad t = \frac{z - z_1}{d_3}$$

Luego, igualamos los parámetros y así obtenemos la ecuación continua:

$$\frac{x - x_1}{d_1} = \frac{y - y_1}{d_2} = \frac{z - z_1}{d_3}$$

EJEMPLO:

Determine la ecuación continua de la recta que pasa por los puntos (2,1, 3) y (1,0,4).

EJERCICIO TIPO PSU:

Dado el triángulo de vértices $A(3,0,0)$, $B(-1,4,0)$ y $C(-1,1,3)$, ¿Cuál de las siguientes ecuaciones corresponde a una ecuación de la recta que pasa por el vértice C y por el punto medio de AB?

A) $\frac{x+1}{2} = y - 1 = \frac{3-z}{3}$

B) $-x + 2 = y - 2 = \frac{z}{3}$

C) $x + 2 = \frac{y+1}{2} = z - 3$

D) $x + 1 = \frac{y-1}{3} = \frac{z-3}{3}$

E) Ninguna de las anteriores.

POSICIONES RELATIVAS DE LAS RECTAS EN EL ESPACIO

1) RECTAS COINCIDENTES

Dos rectas en el plano:

$$L_1: (x, y, z) = (x_1, y_1, z_1) + \delta(d_x, d_y, d_z)$$

$$L_2: (x, y, z) = (x_2, y_2, z_2) + \mu(b_x, b_y, b_z)$$

$\delta \; y \; \mu \;\; \in R$

Son coincidentes si el vector director de L_1, el vector director de L_2 y el vector director entre (x_1, y_1, z_1) y (x_2, y_2, z_2) son proporcionales entre si. O sea:

$$(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) = \alpha(d_x, d_y, d_z) = \beta(b_x, b_y, b_z)$$

$\alpha \; y \; \beta \;\; \in R$

EJEMPLO: Determine si las siguientes rectas son coincidentes.

Sean $L_1: (x, y, z) = (0, ,8,4) + \delta(-1,21)$

$L_2: (x, y, z) = (3,2,1) + \mu(-2,4,2)$

1° Determinamos el vector director entre $(0,8,4) \; y \; (3,2,1)$

$$(3 - 0,2 - 8,1 - 4) = (3, -6, -3)$$

2° Como $(3, -6, -3) = -3 \cdot (-1,2,1) = \frac{-3}{2} \cdot (-2,4,2)$

Entonces L_1 y L_2 son coincidentes.

2) RECTAS PARALELAS

Dos rectas en el plano:

$$L_1: (x, y, z) = (x_1, y_1, z_1) + \delta(d_x, d_y, d_z)$$
$$L_2: (x, y, z) = (x_2, y_2, z_2) + \mu(b_x, b_y, b_z)$$

$\delta \; y \; \mu \; \in R$

Son paralelas si el vector director de L_1 y el vector director de L_2 son proporcionales entre sí, pero NO son proporcionales con el vector director entre (x_1, y_1, z_1) y (x_2, y_2, z_2). O sea:

$$(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) \neq \alpha(d_x, d_y, d_z) = \beta(b_x, b_y, b_z)$$

Ejemplo: Determine si las siguientes rectas son paralelas.

Sean $L_1: (x, y, z) = (3,1,0) + \delta(-1,4,3)$

$L_2: (x, y, z) = (-1,1,2) + \mu(-2,8,6)$

El vector director entre:

$(3,1,0) \; y \; (-1,1,2)$ es:

$(3 - (-1), 1 - 1, 0 - 2)$

$(4,0,-2)$

Como $(-2,8,6) = 2 \cdot (-1,4,3)$

Los vectores directores de las rectas son proporcionales entre si, pero no son proporcionales con el vector director entre (x_1, y_1, z_1) y (x_2, y_2, z_2).

Entonces L_1 y L_2 son paralelas.

3) RECTAS PERPENDICULARES

Dos rectas en el plano:

$$L_1: (x, y, z) = (x_1, y_1, z_1) + \delta(d_x, d_y, d_z)$$
$$L_2: (x, y, z) = (x_2, y_2, z_2) + \mu(b_x, b_y, b_z)$$

$\delta \; y \; \mu \; \in R$

Son perpendiculares si:

$$\boldsymbol{d_x \cdot b_x + d_y \cdot b_y + d_z \cdot b_z = 0}$$

EJEMPLO: Determine si las siguientes rectas son perpendiculares

$\mathrm{L_1: (x, y, z) = (3,1,0) + \delta(-1,4,5)}$

$\mathrm{L_2: (x, y, z) = (-2,1,4) + \mu(-1,1,-1)}$; δ y $\mu \in \mathrm{R}$

Como: $-1 \cdot (-1) + 4 \cdot 1 + 5 \cdot (-1) = 0$

$\therefore L_1 \; y \; L_2$ son perpendiculares